

УДК 532.5.031-533.692-533.694

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЗАКРЫЛКА НА АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ С ВЫДУВОМ РЕАКТИВНОЙ СТРУИ

*Д.Ф. Абзалилов, Р.Ф. Марданов*

### Аннотация

В работе рассматривается задача расчета обтекания потоком идеальной несжимаемой жидкости заданного крылового профиля с выдувом реактивной струи из канала при наличии в потоке закрылка. Закрылок моделируется точечным вихрем с заданной циркуляцией; выдуваемая струя имеет параметры (плотность и полное давление), отличные от параметров набегающего потока, вследствие чего на границе струи скорость потока терпит скачок. Разработанный метод решения задачи основан на теории аналитических функций, кусочно-аналитическая функция комплексного потенциала отыскивается в итерационном процессе. Исследовано влияние координат вихря на аэродинамические характеристики крылового профиля, найдено его оптимальное положение, позволяющее достичь максимального значения коэффициента подъемной силы.

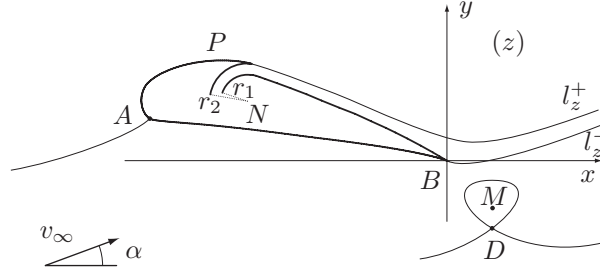
**Ключевые слова:** крыловой профиль, закрылок, выдув, реактивная струя, оптимизация.

---

### Введение

Для улучшения аэродинамических характеристик крыловых профилей используются различные устройства управления потоком, которые можно разделить на пассивные (без подвода энергии) и активные [1]. Пассивными устройствами являются закрывки, предкрылки, вихревые ячейки и т.п. К активным методам управления потоком относятся отсос пограничного слоя, выдув в поток реактивной струи и др. Особенно эффективным является выдув реактивной струи [2]. В силу ряда эффектов (Коанда, суперциркуляции и струйного закрывка) выдув приводит к увеличению коэффициента подъемной силы в несколько раз по сравнению с непроницаемым крыловым профилем. Эффект от выдува можно увеличить, если одновременно с его введением использовать закрылок, позволяющий отклонять выдуваемую струю на больший угол.

В настоящей работе решена задача расчета обтекания крылового профиля с выдувом реактивной струи при наличии в потоке закрывка. Крыловой профиль считается известным, а закрылок моделируется точечным вихрем заданной циркуляции. Исследовано влияние координат вихря на аэродинамические характеристики крылового профиля, найдено его оптимальное положение, позволяющее достичь максимального значения коэффициента подъемной силы. Показано, что взаимодействие вихря даже малой интенсивности и реактивной струи позволяет значительно увеличить коэффициент подъемной силы крылового профиля.

Рис. 1. Физическая плоскость  $z$ 

### 1. Постановка задачи

В физической плоскости  $z = x + iy$  заданный крыловой профиль  $AB$  плавно обтекается плоским установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости (рис. 1). Плотность потока  $\rho$ , скорость на бесконечности имеет величину  $v_\infty$  и угол  $\alpha$ , давление  $p_\infty$ , хорда профиля  $b$ . На поверхности профиля имеется щель ширины  $h$ , моделируемая завитком, вверх по потоку асимптотически переходящим в бесконечнолистный круговой канал с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  [3]. В случае равных скоростей стенки канала асимптотически стремятся к прямым и в расчетной схеме уходят на второй лист римановой поверхности. Из щели выдувается струя идеальной несжимаемой жидкости с другой плотностью  $\rho_j$  и скоростью  $v_{j\infty}$  при давлении  $p_\infty$ . Здесь и далее индексом  $j$  обозначены параметры струи.

В точке  $A$  разветвления потока профиль предполагается гладким, а точки  $B$  и  $P$  схода потока являются острыми кромками. Величина расхода  $Q$  через щель и циркуляция  $\Gamma$  вокруг профиля определяются таким образом, чтобы сход потока в этих точках происходил плавно. Для моделирования закрылка в потоке в точке  $M$  вблизи задней кромки располагается точечный вихрь циркуляции  $\Gamma_0$ .

Требуется определить аэродинамические характеристики системы, состоящей из крылового профиля и точечного вихря и найти оптимальное положение вихря, обеспечивающего максимальное значение коэффициента подъемной силы системы.

### 2. Решение

За основу решения используем метод [4]. Введем плоскость  $\zeta = re^{i\gamma}$  и в качестве канонической области рассмотрим внешность единичного круга (рис. 2). Потребуем соответствие бесконечно удаленных точек плоскостей  $z$  и  $\zeta$  и переход задней кромки  $B$  с координатой  $z = 0$  в точку  $\zeta = 1$ . Таким образом функция  $z(\zeta)$  определяется однозначно.

Функцию  $dz/d\zeta$  запишем в виде

$$\frac{dz}{d\zeta} = r_0 e^{-i\gamma_0} e^{-\chi(\zeta)} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_p}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right)^{ai/\pi-1}, \quad (1)$$

где  $a = \ln(r_2/r_1)$ ;  $\zeta_p = e^{i\gamma_p}$ ,  $\zeta_n = e^{i\gamma_n}$  — координаты точек  $P$ ,  $N$  на окружности  $|\zeta| = 1$ . Функция  $\chi(\zeta)$  является аналитической функцией во внешности круга и обращается в ноль в бесконечно удаленной точке. Запишем ее в виде ряда Лорана

$$\chi(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + ib_k) \zeta^{-k}. \quad (2)$$

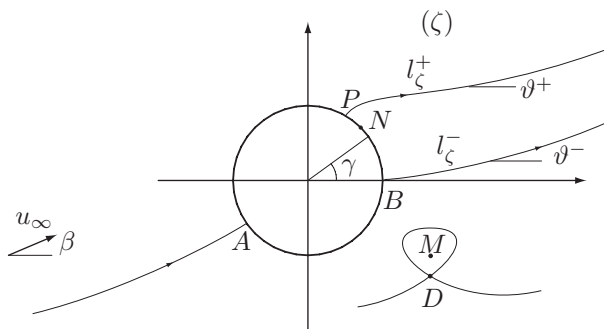


Рис. 2. Каноническая плоскость  $\zeta$

Так как функция  $z(\zeta)$  известна, то по ней определяются параметры  $r_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma_p$ ,  $\gamma_n$  и коэффициенты  $a_k$ ,  $b_k$ . Также считаем известным координаты точки  $M$  в канонической области  $\zeta_m = r_m e^{i\gamma_m}$ .

Обозначим через  $l_z^+$  и  $l_z^-$  линии тока, сходящиеся с острых кромок  $P$  и  $B$  профиля и разделяющие среды с плотностями  $\rho$  и  $\rho_j$ . При переходе через эти линии давление меняется непрерывно, а скорость в общем случае изменяется скачком. Из интеграла Бернулли следует

$$\rho_j v_j^2 = \rho v^2 + \mu \rho v_\infty^2, \quad (3)$$

где

$$\mu = \frac{\rho_j v_{j\infty}^2}{\rho v_\infty^2} - 1.$$

При сделанных предположениях во внешнем потоке и в струе существуют комплексные потенциалы потоков. Будем рассматривать их как единую кусочно-аналитическую функцию  $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ , терпящую разрыв на двух линиях схода потока. Комплексно сопряженную скорость в плоскости  $\zeta$  представим в виде [5, гл.4]

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_\infty e^{-i\beta} e^{-\Omega(\zeta)} f(\zeta) g(\zeta), \quad (4)$$

где  $u_\infty$  и  $\beta$  – модуль и аргумент скорости на бесконечности в плоскости  $\zeta$ ;  $\Omega(\zeta) = T(r, \gamma) + i\Lambda(r, \gamma)$  – кусочно-аналитическая функция, терпящая скачок на линиях  $l_\zeta^+$  и  $l_\zeta^-$  – образах линий схода потока  $l_z^+$  и  $l_z^-$  в физической плоскости. В формуле (4) в нашем случае

$$f(\zeta) = \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_p}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right)^{-1},$$

$$g(\zeta) = \left(1 - \frac{\zeta m}{\zeta}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\zeta m^*}{\zeta}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\zeta d}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta d^*}{\zeta}\right),$$

где  $\zeta_a = e^{i\gamma_a}$  – координата точки  $A$  разветвления потока на окружности  $|\zeta| = 1$ ;  $\zeta_d = r_d e^{i\gamma_d}$  – координата критической точки  $D$  в потоке, появляющейся около вихря;  $\zeta_m^* = 1/r_m e^{i\gamma_m}$ ,  $\zeta_d^* = 1/r_d e^{i\gamma_d}$  – координаты точек, сопряженных к точкам  $M$  и  $D$  относительно единичной окружности.

Рассмотрев (4) на единичной окружности и учтя, что она является линией тока, получим, что  $\Lambda = \text{Im}\Omega$  постоянна

$$\Lambda(\gamma) \equiv \delta = \frac{\gamma_a + \gamma_p - \gamma_n - \pi}{2} - \beta - \gamma_m + \gamma_d. \quad (5)$$

Из (1) и (4) следует

$$\frac{dw}{dz} = \frac{u_\infty}{r_0} e^{i(\gamma_0 - \beta)} e^{\chi(\zeta) - \Omega(\zeta)} \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right)^{-ai/\pi} g(\zeta). \quad (6)$$

Так как  $dw/dz|_\infty = v_\infty e^{-i\alpha}$ , то определим

$$u_\infty = r_0 v_\infty, \quad \beta = \gamma_0 + \alpha.$$

Рассмотрев левую и правую части (6) на линиях  $l_\zeta^\pm$  раздела сред запишем величину скачка  $\Omega(\zeta)$  через отношение скоростей

$$\Omega - \Omega_j|_{l_\zeta^\pm} = T - T_j|_{l_\zeta^\pm} = \lambda^\pm(t), \quad \lambda^\pm(t) = \ln \frac{v_j^\pm(t)}{v^\pm(t)} \Big|_{l_\zeta^\pm}, \quad (7)$$

где  $t$  – дуговая абсцисса линий раздела, отсчитываемая от точек схода потока  $P$  и  $B$ . Следовательно, функция  $\Omega(\zeta)$ , удовлетворяющая условиям (5) и (7) имеет вид

$$\Omega(\zeta) = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(1/\bar{\zeta})} - \overline{\Phi(0)}, \quad \Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{l_\zeta^+} \frac{\lambda^+(t) dt}{t - \zeta} - \int_{l_\zeta^-} \frac{\lambda^-(t) dt}{t - \zeta} \right\}. \quad (8)$$

Пусть  $\vartheta^+(t)$  и  $\vartheta^-(t)$  – углы наклона касательной к  $l_\zeta^+(t)$  и  $l_\zeta^-(t)$  соответственно, то есть

$$\frac{d\zeta^\pm(t)}{dt} = e^{i\vartheta^\pm(t)}. \quad (9)$$

Так как линии раздела сред являются линиями тока в канонической плоскости, то  $dw/d\zeta|_{l_\zeta^\pm} = u(t)e^{-i\vartheta^\pm(t)}$ . Рассмотрев аргумент (4) на линиях раздела, получим

$$\vartheta = \beta + \Lambda - \arg(f + g). \quad (10)$$

Разложив функцию  $\frac{dw}{d\zeta}$  в ряд Лорана в окрестности точки  $\zeta_m$

$$\frac{dw}{d\zeta} \Big|_{\zeta \rightarrow \zeta_m} = \frac{i\Gamma_0}{2\pi(\zeta - \zeta_m)} + o\left(\frac{1}{\zeta - \zeta_m}\right),$$

получим связь циркуляции  $\Gamma_0$  с другими параметрами задачи

$$\Gamma_0 = -2\pi i u_\infty e^{-i\beta} e^{-\Omega(\zeta_m)} \frac{(\zeta_m - \zeta_a)(\zeta_m - 1)(\zeta_m - \zeta_p)(\zeta_m - \zeta_d)(\zeta_m - \zeta_d^*)}{\zeta_m^2(\zeta_m - \zeta_n)(\zeta_m - \zeta_m^*)}. \quad (11)$$

Соотношения (5) и (11) представляют собой систему нелинейных уравнений для определения координат  $r_d$ ,  $\gamma_d$ ,  $\gamma_a$  критических точек  $D$  и  $A$ . Для ее решения используем итерационный метод, составив следующую итерационную процедуру.

В качестве начального приближения зададим

$$r_d^{(0)} = r_m, \quad \gamma_d^{(0)} = \gamma_m, \quad \gamma_a^{(0)} = 2(\beta + \delta) - \gamma_p + \gamma_n + \pi.$$

Итерационная процедура содержит следующие шаги:

– разрешив (11) относительно  $\zeta_d$ , запишем

$$\zeta_d^{(k)} = \zeta_m - \frac{i\Gamma_0 e^{i\beta} e^{\Omega(\zeta_m)} \zeta_m^2 (\zeta_m - \zeta_n)(\zeta_m - \zeta_m^*)}{2\pi u_\infty (\zeta_m - 1)(\zeta_m - \zeta_p)(\zeta_m - \zeta_d^{*(k-1)})(\zeta_m - \zeta_a^{(k-1)})},$$

откуда  $\gamma_d^{(k)} = \arg[\zeta_d^{(k)}]$ ,  $r_d^{(k)} = |\zeta_d^{(k)}|$ ;

– выразив из (5)  $\gamma_a$  найдем

$$\gamma_a^{(k)} = 2(\beta + \delta - \gamma_d^{(k)} + \gamma_m) - \gamma_p + \gamma_n + \pi$$

и затем определим  $\zeta_a^{(k)} = e^{i\gamma_a^{(k)}}$ .

Выполнение итерационной процедуры продолжается до тех пор, пока не удовлетворится условие  $|\zeta_d^{(k)} - \zeta_d^{(k-1)}| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданное малое число.

### 3. Схема итерационного процесса.

Для определения искомых функций  $\vartheta^\pm(t)$ ,  $\lambda^\pm(t)$  организуем следующий итерационный процесс.

*Начальный этап.* Зададим каким-либо образом в начальном приближении функции  $\lambda^\pm(t)$ ,  $\vartheta^\pm(t)$  с учетом того, что в точках  $P$  и  $B$  справедливы соотношения:

$$\vartheta^+(0) = \gamma_p, \quad \vartheta^-(0) = 0.$$

Эти соотношения следуют из условия, что в канонической плоскости линии схода потока подходят к единичной окружности под прямым углом. На бесконечности имеем

$$\vartheta^+(\infty) = \vartheta^-(\infty) = \beta.$$

*Основной этап.*

1. Проинтегрировав (9), определим линии раздела  $l_\zeta^\pm(t)$ .
2. По (8) определим на линиях раздела  $l_\zeta^\pm(t)$  функции  $T^\pm(t) = \operatorname{Re}\Omega(\zeta^\pm(t))$ ,  $\Lambda^\pm(t) = \operatorname{Im}\Omega(\zeta^\pm(t))$  и на границе круга  $|\zeta| = 1$  функцию  $T(\gamma) = \operatorname{Re}\Omega(e^{i\gamma})$  и значение  $\delta$ .
3. По (2) найдем на линиях раздела  $S^\pm(t) = \operatorname{Re}\chi(\zeta^\pm(t))$  и на границе круга  $S(\gamma) = \operatorname{Re}\chi(e^{i\gamma})$ .
4. Определим параметры  $\gamma_a$ ,  $r_d$ ,  $\gamma_d$  из решения системы уравнений (5), (11).
5. Распределение скоростей внешнего потока  $v^\pm(t)$  на линиях  $l_\zeta^\pm(t)$  вычислим по формуле

$$v^\pm(t) = v_\infty e^{S^\pm(t) - T^\pm(t)} \left| \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right)^{-ai/\pi} \right|,$$

вытекающей из (6).

6. Распределение скоростей струи  $v_j^\pm(t)$  на линиях  $l_\zeta^\pm(t)$  получим по формуле (3).
7. Новые функции  $\vartheta^\pm(t)$ ,  $\lambda^\pm(t)$  определим из соотношений (7), (10).
8. Итерационный процесс завершаем при выполнении условий

$$\max_t |\vartheta_{(k)}^\pm(t) - \vartheta_{(k-1)}^\pm(t)| < \varepsilon; \quad \max_t |\lambda_{(k)}^\pm(t) - \lambda_{(k-1)}^\pm(t)| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – заданное малое изменение искомых функций, индексом  $k$  обозначено их значение на  $k$ -ой итерации. В противном случае повторяем основной этап.

#### 4. Расчет аэродинамических сил

Для расчета аэродинамических сил воспользуемся следующими формулами

$$\mathbf{R} = R_x + iR_y, \quad R_x = -\rho v_\infty \tilde{Q} = -\rho_j v_{\infty j} Q, \quad R_y = \rho v_\infty \tilde{\Gamma}. \quad (12)$$

Эти формулы выведены в [6] для изолированного профиля с выдувом реактивной струи. Проведя аналогичный вывод, легко показать, что их также можно использовать и в случае наличия в потоке вихря. Здесь  $\mathbf{R}$  – суммарная аэродинамическая сила, действующая на крыловой профиль и вихрь,  $R_x$  и  $R_y$  – суммарные сила сопротивления (тяги) и подъемная сила соответственно.

Величины  $Q$ ,  $\tilde{Q}$  и  $\tilde{\Gamma}$  найдем, разложив в ряд функцию  $\frac{dw}{d\zeta}$  в окрестности точки  $\zeta_n$  и бесконечно удаленной точки:

$$\left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_{\zeta \rightarrow \zeta_n} = \frac{Q}{\pi(\zeta - \zeta_n)} + o\left(\frac{1}{\zeta - \zeta_n}\right), \quad (13)$$

$$\left. \frac{dw}{d\zeta} \right|_{\zeta \rightarrow \infty} = u_\infty e^{-i\beta} + \frac{\tilde{Q} + i\tilde{\Gamma}}{2\pi\zeta} + o\left(\frac{1}{|\zeta|}\right), \quad (14)$$

Подставив в (13) и (14) выражение (4), запишем

$$Q = 8\pi u_\infty e^{-T(\gamma_n)} \frac{r_d + 1/r_d - 2\cos(\gamma_n - \gamma_d)}{r_m + 1/r_m - 2\cos(\gamma_n - \gamma_m)} \sin \frac{\gamma_n - \gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma_n}{2} \sin \frac{\gamma_n - \gamma_p}{2} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q} = & 2\pi u_\infty [\cos(\gamma_n - \beta) - \cos \beta - \cos(\gamma_p - \beta) - \cos(\gamma_a - \beta) - \operatorname{Re}(\omega e^{-i\beta}) + \\ & + (r_m + 1/r_m) \cos(\gamma_m - \beta) - (r_d + 1/r_d) \cos(\gamma_d - \beta)], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} = & 2\pi u_\infty [\sin(\gamma_n - \beta) + \sin \beta - \sin(\gamma_p - \beta) - \sin(\gamma_a - \beta) - \operatorname{Im}(\omega e^{-i\beta}) + \\ & + (r_m + 1/r_m) \sin(\gamma_m - \beta) - (r_d + 1/r_d) \sin(\gamma_d - \beta)]. \end{aligned}$$

В этих формулах  $\omega$  – коэффициент разложения в ряд Лорана функции  $\Omega(\zeta)$ :

$$\Omega(\zeta)|_{\zeta \rightarrow \infty} = \frac{\omega}{\zeta} + o\left(\frac{1}{|\zeta|}\right).$$

Формула для его вычисления приведена, напр., в [7]. Соотношения (16) и (15) можно использовать для проверки точности вычислений, так как величина  $\tilde{Q}$  имеет простую связь с расходом  $Q$  [6]:  $\tilde{Q} = v_\infty Q / v_{\infty j}$ .

С другой стороны, силу  $\mathbf{R}$  можно вычислить по формуле

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_l + \mathbf{R}_\Gamma, \quad (17)$$

где  $\mathbf{R}_l$  – сила, действующая непосредственно на крыловой профиль,  $\mathbf{R}_\Gamma$  – сила, действующая на вихрь. Силу  $\mathbf{R}_l$  найдем прямым интегрированием по контуру профиля, используя формулу, следующую из уравнения движения ИНЖ, записанного в интегральной форме

$$\mathbf{R}_l = \oint_{L_1 \cup L_2} [p\mathbf{n} + \rho \mathbf{V}(\mathbf{V}, \mathbf{n})] ds = \oint_{L_1 \cup L_2} p \mathbf{n} ds + \int_{L_2} \rho_j \mathbf{V}(\mathbf{V}, \mathbf{n}) ds = \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_j.$$

Здесь  $L_1$  – непроницаемая, а  $L_2$  – проницаемая часть поверхности профиля (некоторая линия поперек канала выдува),  $\mathbf{n}$  – нормаль, внутренняя к поверхности профиля,  $\mathbf{V}$  – вектор скорости,  $\mathbf{R}_p$  – интеграл сил давления, действующих на профиль,  $\mathbf{R}_j$  – реактивная сила. Давления  $p$  и  $p_j$  на поверхности профиля, граничащей с внешним потоком и со струей соответственно, найдем по формулам

$$p = p_0 - \frac{\rho V^2}{2}, \quad p_j = p_{j0} - \frac{\rho_j V_j^2}{2}.$$

Силу  $\mathbf{R}_\Gamma$ , действующую на вихрь, определим по формуле Чаплыгина (см., напр., [8])

$$\mathbf{R}_\Gamma = \frac{\rho' i}{2} \oint_{l_{mz}} \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz = \frac{\rho' i}{2} \oint_{l_{m\zeta}} \left( \frac{dw}{d\zeta} \right)^2 \left( \frac{dz}{d\zeta} \right)^{-1} d\zeta = -\pi \rho' \overline{c_{-1}},$$

где  $l_{mz}$ ,  $l_{m\zeta}$  – окружности малого радиуса вокруг точки  $M$  в физической и канонической плоскостях соответственно,  $\rho'$  – плотность жидкости в окрестности вихря ( $\rho' = \rho$  в случае расположения вихря во внешнем потоке,  $\rho' = \rho_j$  в случае расположения вихря в струе),  $c_{-1}$  – коэффициент при члене  $(\zeta - \zeta_m)^{-1}$  в разложении подынтегральной функции в ряд Лорана в окрестности точки  $\zeta = \zeta_m$ , который можно найти по формуле

$$c_{-1} = \text{res}_{\zeta_m} \left[ \left( \frac{dw}{d\zeta} \right)^2 \left( \frac{dz}{d\zeta} \right)^{-1} \right]. \quad (18)$$

Для вычисления  $c_{-1}$  разложим в ряды Лорана в окрестности точки  $\zeta = \zeta_m$  функции

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\zeta} &= \frac{A_{-1}}{\zeta - \zeta_m} + A_0 + A_1(\zeta - \zeta_m) + \dots, \\ \frac{dz}{d\zeta} &= B_0 + B_1(\zeta - \zeta_m) + B_2(\zeta - \zeta_m)^2 + \dots \end{aligned}$$

Подставив эти разложения в (18), определим

$$c_{-1} = \frac{A_{-1}}{B_0^2} (2A_0 B_0 - B_1 A_{-1})$$

С учетом формул (1) и (4) найдем

$$\begin{aligned} A_{-1} &= \frac{i\Gamma_0}{2\pi}, \\ A_0 &= \frac{A_{-1}}{\zeta_m} \left[ -\zeta_m \Omega'(\zeta_m) + \frac{1}{\zeta_m - 1} + \frac{\zeta_p}{\zeta_m - \zeta_p} + \frac{\zeta_a}{\zeta_m - \zeta_a} - \frac{\zeta_n}{\zeta_m - \zeta_n} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta_d}{\zeta_m - \zeta_d} + \frac{\zeta_d^*}{\zeta_m - \zeta_d^*} - \frac{\zeta_m^*}{\zeta_m - \zeta_m^*} + 1 \right], \\ B_0 &= r_0 e^{-i\gamma_0 - \chi(\zeta_m)} \left( 1 - \frac{1}{\zeta_m} \right) \left( 1 - \frac{\zeta_p}{\zeta_m} \right) \left( 1 - \frac{\zeta_n}{\zeta_m} \right)^{\frac{ai}{\pi} - 1}, \\ B_1 &= \frac{B_0}{\zeta_m} \left[ -\zeta_m \chi'(\zeta_m) + \frac{1}{\zeta_m - 1} + \frac{\zeta_p}{\zeta_m - \zeta_p} + \left( \frac{ai}{\pi} - 1 \right) \frac{\zeta_n}{\zeta_m - \zeta_n} \right], \end{aligned}$$

где  $\Omega'(\zeta) = \frac{d\Omega}{d\zeta}$  и  $\chi'(\zeta) = \frac{d\chi}{d\zeta}$  находятся дифференцированием (8) и (2) по  $\zeta$ .

Аэродинамические силы, вычисленные по формулам (12) и (17) должны совпадать. Это также может являться критерием оценки точности вычислений. Коэффициенты сопротивления (тяги) и подъемной силы определим по формулам

$$c_x = \frac{2R_x}{\rho v_\infty^2 b}, \quad c_y = \frac{2R_y}{\rho v_\infty^2 b}. \quad (19)$$

### 5. Решение оптимизационной задачи

При решении оптимизационной задачи зафиксируем скорость набегающего потока  $v_\infty$ , энергию выдуваемой струи, то есть параметр  $\mu$ , плотности  $\rho$  и  $\rho_j$  и угол атаки  $\alpha$ . Расход жидкости  $Q$  определяется по формуле (15), это гарантирует, что острые кромки  $B$  и  $P$  будут являться точками схода потока. Задача максимизации коэффициента подъемной силы сводится к задаче максимизации функции двух переменных

$$c_y(x_m, y_m) \rightarrow \max.$$

Для удобства расчетов будем вычислять ее как параметрически заданную функцию с учетом (19) и того, что функция  $z(\zeta)$  известна:

$$c_y(x_m, y_m) = \begin{cases} c_y = c_y(r_m, \gamma_m), \\ x_m = x_m(r_m, \gamma_m), \\ y_m = y_m(r_m, \gamma_m). \end{cases}$$

Ввиду достаточной сложности определения функции  $c_y(x_m, y_m)$  решение задачи максимизации проведено перебором. При этом в силу принятой схемы течения полагается, что критическая точка  $D$  располагается в потоке. Предельные случаи, когда точка  $D$  “садится” на границу струи или на поверхность профиля не рассматриваются. В таких случаях, а также в случаях близких к предельным, итерационный процесс не сходится, а значение коэффициента подъемной силы заменяется штрафным значением  $c_y = -100$ .

### 6. Результаты расчетов

Для проведения расчетов выбран крыловой профиль, построенный методом [4], с каналом выдува струи, расположенным вблизи задней кромки (рис. 3). Скорость набегающего потока принята  $v_\infty = 1$ , параметр  $\mu = 3$ , плотности  $\rho = \rho_j = 1$ , угол атаки  $\alpha = 7.2^\circ$ , хорда  $b = 1$ , коэффициент подъемной силы без наличия вихря в потоке равен  $c_y = 0.866$ . В ходе тестовых расчетов было установлено, что значение  $c_y$  увеличивается при приближении положения вихря к задней кромке  $B$  профиля. Коэффициент подъемной силы вычислялся с учетом обеих формул (12) и (17),

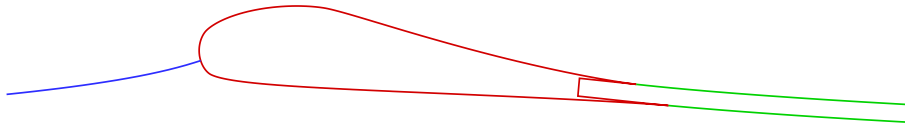
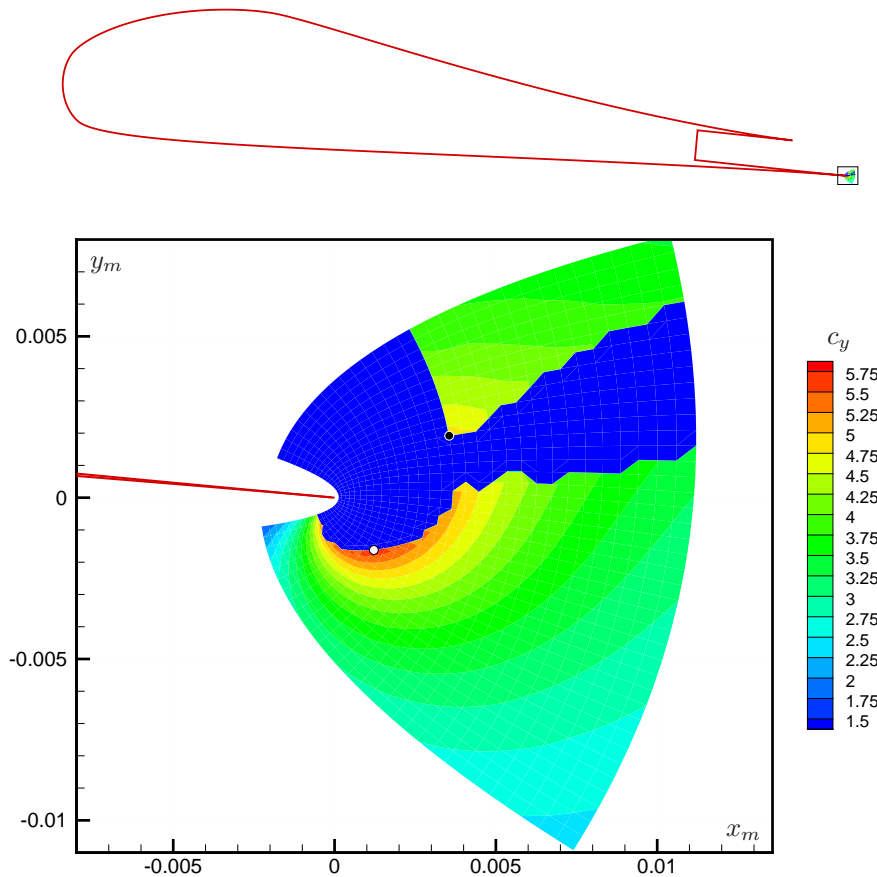


Рис. 3. Исследуемый крыловой профиль с устройством выдува реактивной струи



Рис. 4. Поле функции  $c_y(x_m, y_m)$  в случае  $\Gamma_0 = 0.1$ 

различие составило не более 0.5%. Поэтому в целевых расчетах оптимальное положение вихря отыскивалось варьированием координат  $(x_m, y_m)$  вблизи точки  $B$ , для вычисления  $c_y$  использовалась формула (12).

В первом расчете интенсивность вихря выбрана равной  $\Gamma_0 = 0.1$ . На рис. 4 показано поле функции  $c_y(x_m, y_m)$ , которое построено варьированием переменных  $(r_m, \gamma_m)$  в диапазоне  $1.02 \leq r_m \leq 1.2$  и  $6.2 \leq \gamma_m \leq 6.36$ . Синим цветом отображена область расположения вихря, в которой решение задачи обтекания крылового профиля получить не удалось, а значение  $c_y$  заменено штрафным значением. Из рисунка видно, что функция  $c_y(x_m, y_m)$  имеет два локальных максимума. Белой точкой отмечено положение локального максимума при подходе вихря снизу, когда вихрь остается во внешнем потоке. Значение коэффициента подъемной силы, соответствующее этому оптимальному положению вихря ( $x_m \approx 0.00121, y_m \approx -0.00162$ ), равно  $c_y = 5.74$ , картина обтекания представлена на рис. 5 (красным цветом показан контур крылового профиля, зеленым – линии  $l_z^\pm$  раздела сред, синим – критические линии тока, точкой – положение вихря, в прямоугольнике помещен увеличенный фрагмент рисунка в окрестности задней кромки). Черной точкой на рис. 4 отмечено положение локального максимума при подходе вихря сверху, когда вихрь располагается в струе. Значение

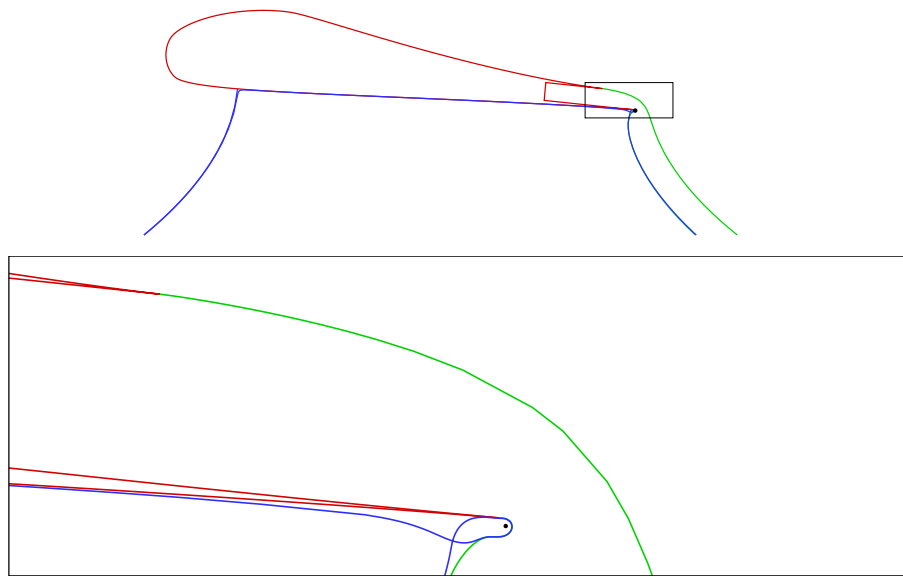


Рис. 5. Картина течения для оптимального положения вихря с циркуляцией  $\Gamma_0 = 0.1$  (вихрь во внешнем потоке)

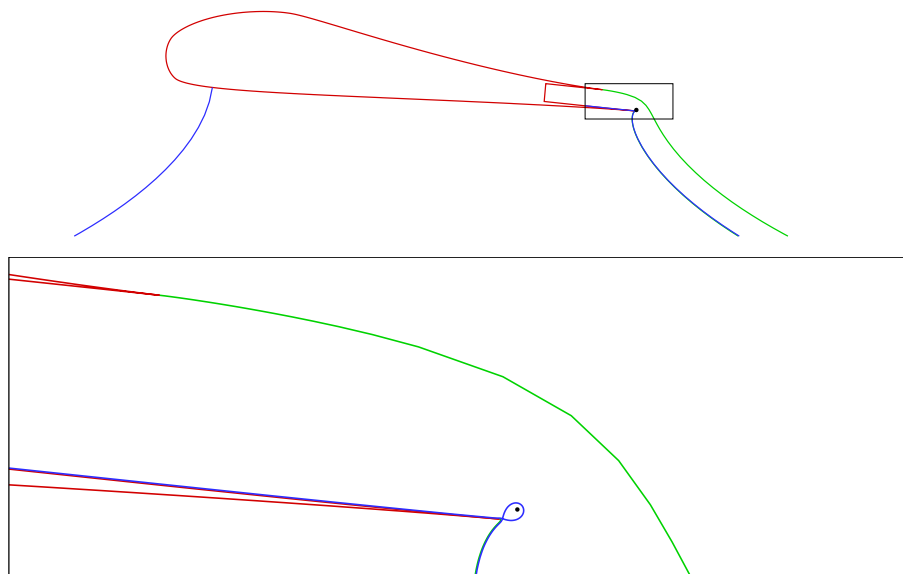
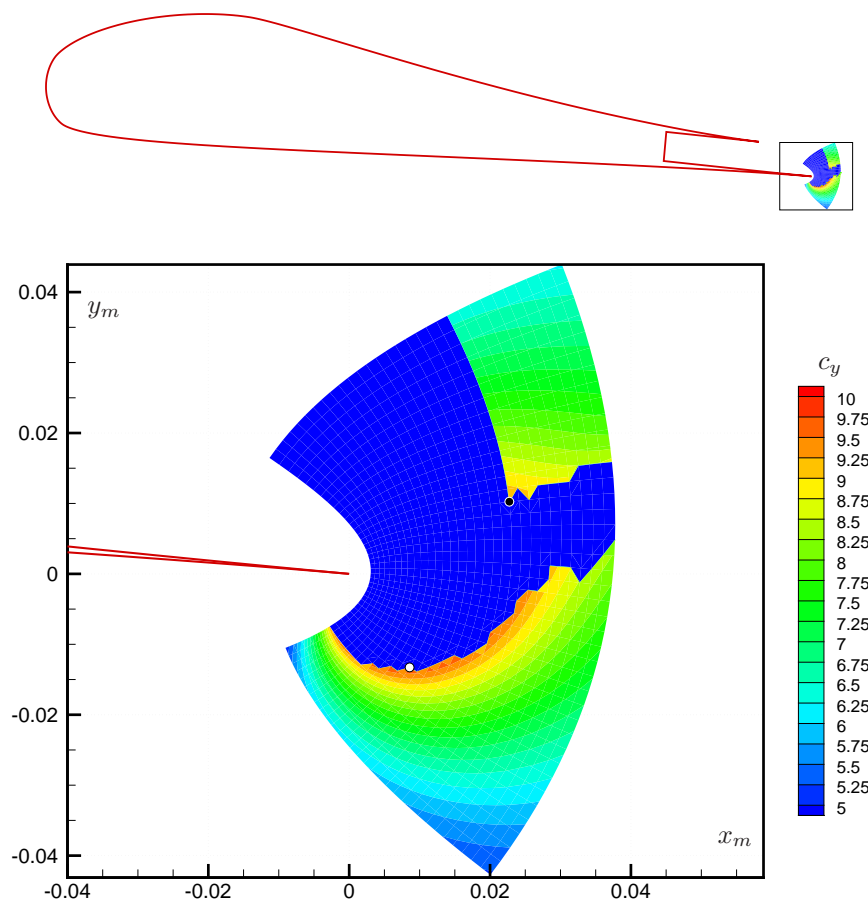


Рис. 6. Картина течения для оптимального положения вихря с циркуляцией  $\Gamma_0 = 0.1$  (вихрь в струе)

коэффициента подъемной силы, соответствующее этому оптимальному положению вихря ( $x_m \approx 0.00355$ ,  $y_m \approx 0.00192$ ), равно  $c_y = 4.84$ , картина обтекания представлена на рис. 6.

Во втором расчете интенсивность вихря выбрана значительно большей:

Рис. 7. Поле функции  $c_y(x_m, y_m)$  в случае  $\Gamma_0 = 0.5$ 

$\Gamma_0 = 0.5$ . На рис. 7 показано поле функции  $c_y(x_m, y_m)$ , которое построено варьированием переменных  $(r_m, \gamma_m)$  в диапазоне  $1.1 \leq r_m \leq 1.4$  и  $6.1 \leq \gamma_m \leq 6.5$ . Значение коэффициента подъемной силы, соответствующее оптимальному положению вихря, когда он остается во внешнем потоке ( $x_m \approx 0.00858, y_m \approx -0.0133$  – белая точка), равно  $c_y = 9.86$ , картина обтекания представлена на рис. 8. Значение коэффициента подъемной силы, соответствующее оптимальному положению вихря, когда он располагается в струе ( $x_m \approx 0.0227, y_m \approx 0.0102$  – черная точка), равно  $c_y = 9.34$ , картина обтекания представлена на рис. 9.

Из проведенных расчетов можно сделать вывод, что увеличение коэффициента подъемной силы достигается при таком положении вихря, которое дает максимальное отклонение выдуваемой струи вниз. Увеличение подъемной силы в этом случае обеспечивается проявлением так называемого эффекта суперциркуляции, а выдуваемая струя выступает в роли жидкого закрылка. Большое отклонение выдуваемой струи, а, следовательно, и значительное увеличение  $c_y$  можно достичь за счет взаимодействия со струей даже вихря малой интенсивности. Глобальный максимум коэффициента подъемной силы по-видимому будет достигаться в некотором предельном случае, когда дополнительная критическая точка, обусловленная наличием вихря, “сядет” на контур крылового профиля или на линию раздела сред.

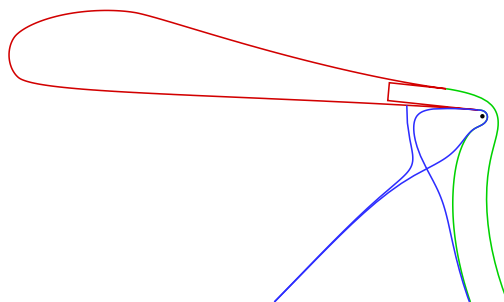


Рис. 8. Картина течения для оптимального положения вихря с циркуляцией  $\Gamma_0 = 0.5$  (вихрь во внешнем потоке)

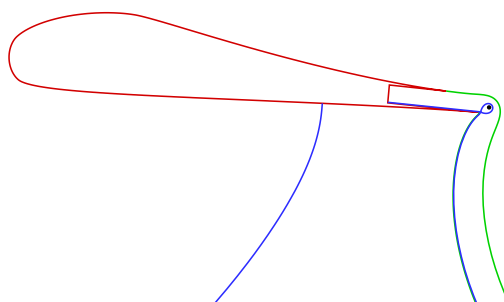


Рис. 9. Картина течения для оптимального положения вихря с циркуляцией  $\Gamma_0 = 0.5$  (вихрь в струе)

### Summary

*D.F. Abzalilov, R.F. Mardanov.* Study of flap influence on aerodynamic characteristics of airfoils with jet blowing.

This paper considers the problem of computing the flow of ideal incompressible fluid around an given airfoil with jet blowing and with the flap. The flap is modeled by a point vortex with a given circulation; the blowing jet has parameters (density and total pressure) differ from the parameters of the incoming flow, whereby at the jet boundary the velocity suffers a jump. The developed method for solving the problem is based on theory of analytic functions, piecewise analytic function of the complex variable is found in an iterative process. The influence of the vortex position on the aerodynamic characteristics of an airfoil is investigated, was found the best position where the maximum value of the lift is achieved.

**Key words:** Airfoil, flap, jet blowing, maximal lift.

### Литература

1. Чжен П. Управление отрывом потока. – М.: Мир, 1979. – 552 с.
2. Жулев Ю.Г., Иншаков С.И. О возможности повышения эффективности тангенциального выдува щелевой струи на поверхность профиля // Изв. РАН. МЖГ. – 1996. – N 4. – С. 182–186.
3. Степанов Г.Ю. Построение плоских каналов и решеток турбомашин с безотрывным течением // Изв. РАН. МЖГ. – 1993. – N 4. – С. 30–42.

4. *Абзалилов Д.Ф., Ильинский Н.Б.* Построение крыловых профилей с выдувом реактивной струи // Изв. РАН. МЖГ. – 1999. – N 3. – С. 134–143.
5. *Маклаков Д.В.* Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами. М.: Янус-К, 1997. – 280 с.
6. *Абзалилов Д.Ф., Ильинский Н.Б.* Об аэродинамических силах, действующих на крыловой профиль с проницаемым участком // Инженерно-физический журнал. – 2006. – N 2. – С. 126–130.
7. *Абзалилов Д.Ф.* Максимизация коэффициента подъемной силы контура с выдувом реактивной струи // Доклады Академии наук России. – 2007. – Т. 412, – N 3. – С. 339–342.
8. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.

---

**Абзалилов Дамир Фаридович** – докт. физ.-мат. наук, доцент, доцент каф. общей математики Казанского (Приволжского) федерального университета

E-mail: *Damir.Abzalilov@kpfu.ru*

**Марданов Ренат Фаритович** – канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент каф. аэрогидромеханики Казанского (Приволжского) федерального университета

E-mail: *Renat.Mardanov@kpfu.ru*